Aula 35

Teoria Qualitativa de EDOs

Determinismo e Previsibilidade

- Existência de soluções
- Unicidade de soluções
- Dependência contínuas nas condições iniciais
- Estabilidade

- 2ª Lei de Newton (Mecânica Clássica):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Leftrightarrow \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{1}{m}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}, t),$$

Solução: $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

- Equação de Schrödinger (Mecânica Quântica):

$$i\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta\phi + V\phi,$$

Solução: $\phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

- Equações de Navier-Stokes (Mecânica dos Fluidos):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \\ \rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}\right) &= -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v} \end{aligned}$$

Solução: $\mathbf{v}(t, x, y, z), p(t, x, y, z)$

- Equações de Einstein (Relatividade Geral):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Solução: Variedade lorentziana 4 dimensões (espaço-tempo) descrita pela métrica $g_{\mu\nu}$

Teorema (Peano): Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Então, dado $(t_0, \mathbf{y_0}) \in \Omega$, existe solução do problema de valor inicial para a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \qquad (t_0, \mathbf{y}_0).$$